

учебного года. Дальнейшая доработка созданных курсов и появление новых электронных комплексов, размещенных в системе дистанционного обучения, позволят со временем организовать электронную базу информационных ресурсов и снять вопрос законодательной базы СДО.

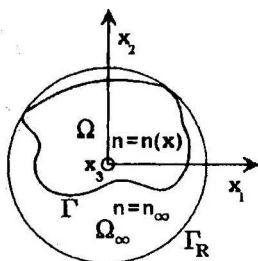
ЛИТЕРАТУРА

1. Амиров К. Ф. *Информационно-правовые аспекты устойчивого развития российского общества* // Материалы второй Всерос. науч.-практ. конф. "Электронная Казань", 2005. – С. 92-95
2. Зуев В. И. *Дистанционные образовательные технологии в республике Казахстан: правовой статус и регулирование*. – <http://www.ksu.ru/conf/ek2009/sbornik/6.doc>.
3. Полат Е. С. *Теория и практика дистанционного обучения: учебное пособие*. / Под ред. Е. С. Полат. – М.: Издательский центр "Академия", 2004. – 416 с.
4. Филатова. З. М. *Электронный учебник как средство дистанционного обучения*. // Информационные технологии в образовании. XIX Межд. конф.-выставка. Сб. трудов, Ч. II. – М.: МИФИ, 2009. – С. 31-35.
5. *Порядок использования дистанционных образовательных технологий* // www.edu.ru/db/mo/Data/d_05/prm137-1.htm — приложение к приказу Минобрнауки России от 6 мая 2005 г. № 137 "Об использовании дистанционных образовательных технологий. Приложение".

А. Г. Фролов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
 Alexander_ksu@mail.ru

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ГРАДИЕНТНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА



Рассматривается бесконечный цилиндрический диэлектрический волновод произвольного поперечного сечения [3]. Введём декартову систему координат так, чтобы ось Ox_3 была параллельна образующей цилиндра. Пусть Ω — область поперечного сечения волновода, $\Omega_\infty = R^2 \setminus \overline{\Omega}$, Γ — липшицева кривая — граница области

Ω , Γ_R — граница круга радиуса R , который полностью включает в себя область Ω . Предполагается, что показатель преломления внутри волновода n является функцией от координат x_1 и x_2 , n_+ — максимальное значение этой функции. Показатель преломления окружающей среды — постоянная величина n_∞ причём $0 < n_\infty < n_+$.

Будем искать векторы напряжённости электрического и магнитного полей в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3, t) = \operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} (x_1, x_2) \exp(i(\beta x_3 - \omega t)) \right),$$

где $E = (E_1, E_2, E_3)^T$ и $H = (H_1, H_2, H_3)^T$ — комплексные амплитуды векторов напряжённости электрического и магнитного полей E и H , β — продольная постоянная распространения, ω — частота электромагнитных колебаний. Будем предполагать,

что волновод слабонаправляющий, т. е. задача сводится к скалярной задаче поиска функции $u = H_1 = H_2$ [1]. Эта функция должна удовлетворять уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta u + \chi^2 u = -\lambda^2 p^2 u, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\Delta u + \chi^2 u = 0, \quad x \in \Omega_\infty. \quad (2)$$

На границе Γ справедливы следующие условия сопряжения:

$$u^+ = u^-, \quad \partial u^+ / \partial \nu = \partial u^- / \partial \nu, \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

Амплитуда u должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности:

$$u = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi r) \exp(il\phi), \quad |x| \geq 1. \quad (4)$$

Здесь использованы безразмерные параметры

$$p^2(x_1, x_2) = (n^2(x_1, x_2) - n_\infty^2) / (n_+^2 - n_\infty^2), \quad k^2 = R^2 \omega^2 \epsilon_0 \mu_0,$$

$$\chi = \sqrt{k^2 n_\infty^2 - (\beta R)^2}, \quad \lambda^2 = k^2 (n_+^2 - n_\infty^2).$$

Задача (1) – (4) является спектральной задачей поиска таких значений параметров χ и λ , при которых существуют ненулевые функции u , удовлетворяющие уравнениям (1), (2) и условиям (3), (4).

В случае, когда волновод имеет круговое поперечное сечение, задача (1) – (4) имеет аналитическое решение. Методами теории потенциала задача (1) – (4) сводится к спектральной задаче для интегрального оператора [2]

$$u(x) = \lambda^2 \int_{\Omega} \Phi(\chi; x, y) p^2(y) u(y) dy, \quad (5)$$

здесь $\Phi(\chi; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi|x-y|)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, $x, y \in R^2 \setminus \Gamma$. Оператор $A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, определяемый правой частью равенства (6), является вполне непрерывным, а в случае, когда $\text{Im}\chi > 0$, $\text{Re}\chi = 0$, — самосопряжённым, что позволяет использовать спектральную теорию вполне непрерывных самосопряжённых операторов. Справедлива следующая

Теорема Для любого χ , такого, что $\text{Im}\chi > 0$, $\text{Re}\chi = 0$, существует счётное множество характеристических чисел λ_i^2 , $i = 1, 2, \dots$, с единственной точкой накопления на бесконечности.

Для численного решения задачи применим метод Галёркина. Произведём триангуляцию области: $\Omega_N = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k \subseteq \Omega$. Затем выберем базисные функции φ_k как характеристические функции для каждого треугольника Ω_k , теперь функция u будет аппроксимироваться следующим образом:

$$u \approx \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k, \quad u_k = u(\xi_k), \quad (6)$$

где ξ_k — центр тяжести треугольника Ω_k . Учитывая представление функции (6), запишем равенство (5) в точках ξ_k , $k = \overline{1, N}$, и получим алгебраическую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} u_i &= \lambda^2 \sum_{j=1}^N a_{ij} u_j, \quad i = \overline{1, N}, \\ a_{ij} &= \int_{\Omega_j} \Phi(\chi; \xi_i, y) p^2(y) dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем задачу (7) в матричном виде

$$u = \lambda^2 A(\chi) u.$$

Основную сложность на практике представляет вычисление диагональных элементов a_{ii} , так как ядро оператора имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Эта особенность была выделена явно:

$$a_{ii}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_i} \ln \frac{1}{|\xi_i - y|} dy + \int_{\Omega_i} \Phi_0(\chi; |\xi_i - y|) p^2(y) dy,$$

$\Phi_0(\chi; |\xi_i - y|)$ — функция, не имеющая особенностей. Интеграл от логарифма был вычислен аналитически с помощью перехода к единичному симплексу. Внедиагональные элементы мы вычисляли по формуле

$$a_{ij} \approx |\Omega_j| \Phi(\chi; \xi_i, \xi_j) p^2(\xi_j).$$

Симметризуем матрицу A , умножив её на диагональную матрицу B , и получим обобщённую задачу на собственные значения

$$Bu = \lambda^2 BA(\chi)u,$$

которая решается при каждом χ . Опишем результаты расчетов для волновода кругового поперечного сечения. Результаты вычислений показали, что относительная погрешность ϵ представима в виде $O((h/R)^2)$.

На рис. 1 представлены дисперсионные кривые (графики функций $\chi = \chi(\lambda^2)$) для первых десяти собственных значений. Сплошные линии получены с помощью описанного численного метода, кружочки — точные значения. На рис. 2 изображены линии уровня первых пяти собственных функций при $\text{Im} \chi = 1$.

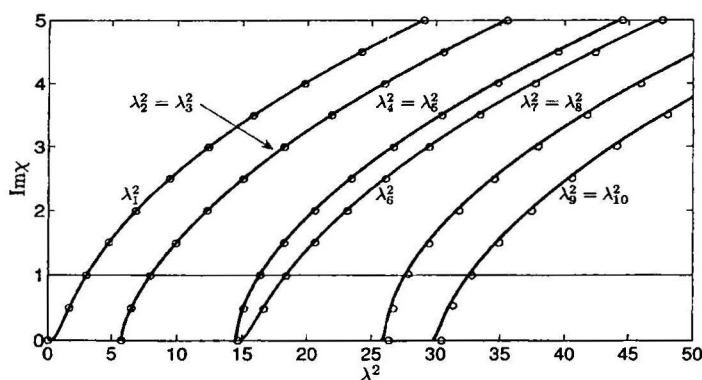


Рис. 1

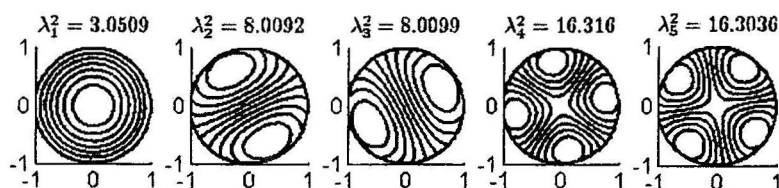


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н., Шатров А. Д. *Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения* // Радиотехника и электроника. – 1979 – Т. 24. – № 7. – С. 1245-1263.

2. Даутов Р. З., Карчевский Е. М. *Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов*. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 271 с.

3. Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов*. – М.: Радио и связь, 1987 – 656 с.